Еще раз о пользе понятного математического языка

Абдрахманов В.Г.

В начале курса линейной алгебры на математических специальностях вузов традиционно трудным для вчерашних школьников является раздел "Матрицы и определители". В этой статье на основе анализа имеющихся учебных пособий обсуждаются две причины, затрудняющие усвоение этого материала: некорректное использование терминологии и недостаточно доступное изложение материала. Предлагается подход к устранению этих недостатков.

В процессе гуманитаризации математического образования большую роль играет математическая культура преподавателя; в частности, очень важно адекватное употребление математических терминов. Между тем мы, преподаватели, часто допускаем вольность речи, что затрудняет понимание студентами излагаемого материала. Мы привыкли к тому, что студент путает многие математические понятия. Но не стоит его в этом винить: мы сами приучили его к неточности. Вот примеры.

"В определителе … различают первую, вторую и третью строки" [1], "определитель, содержащий две одинаковые строки, равен нулю" [2], "существует хотя бы один отличный от нуля определитель из r строк и r столбцов" [3] (хотя определитель квадратной матрицы есть число и, конечно, не имеет ни строк, ни столбцов). При доказательстве теоремы о базисном миноре [4] используется выражение "базисный минор находится в левом верхнем углу матрицы", и подобного рода вольность встречаем и в других книгах [5].

Причина такого обращения с терминологией в разделе "Матрицы и определители" понятна: она обусловлена стремлением преподавателя лаконично изложить материал. Что касается свойств определителей, то здесь изложение можно без труда сделать и лаконичным и в то же время корректным. Например, можно сказать “Определитель квадратной *матрицы* с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю” или “Разложение определителя квадратной *матрицы* по *ее* первой строке (столбцу)” и т.п. Иначе обстоит дело, когда мы переходим к понятию ранга матрицы. Здесь объективно возникают сложности при попытке лаконичного и одновременно корректного изложения материала. Например, выражение “базисный минор находится в левом верхнем углу матрицы” пришлось бы сформулировать как “подматрица, определителем которой является базисный минор, находится в левом верхнем углу матрицы ” (согласитесь, что такую формулировку лаконичной не назовешь). Как видим, неудобства формулировок связаны с понятием *минора матрицы*.

Нам представляется, что эту ситуацию можно радикально изменить, *отказавшись от самого понятия минора матрицы*, тем более что студенты путают понятия минора элемента и минора матрицы. Вместо этого можно пользоваться известным понятием *подматрицы* (или субматрицы). При этом ранг матрицы следует понимать как наивысший порядок ее невырожденных (квадратных) подматриц. Разумеется, теорема о базисном миноре теперь должна называться теоремой о базисной подматрице.

Заметим, что такой подход позволяет корректно и кратко изложить и другие вопросы (элементарные преобразования матриц, теорему Кронекера-Капелли и т. д.). Правда, понятие минора матрицы используется в теореме Лапласа, но без нее можно обойтись, поскольку в курсе алгебры она нужна только для доказательства утверждения об определителе произведения матриц. Последнее же можно доказать (причем более доступно) с помощью элементарных матриц [6].

Остановимся на вопросе, связанном с линейной зависимостью векторов.

Пусть система вектор-столбцов $m \times n-$матрицы $A=(a_{ij})$ линейно независима. Что можно сказать о линейной зависимости системы вектор-столбцов матрицы, полученной из данной перестановкой каких-либо ее строк? Ответ для начинающего студента не очевиден. Между тем в известных нам учебных пособиях эта тонкость игнорируется (например, при доказательствах теорем о базисном миноре [7] и о равенстве строчечного и столбцового рангов матрицы [8]). В этой статье приведем доказательство последнего утверждения, где указанное обстоятельство будет учтено. Нам понадобится отличный от общепринятого взгляд на элементарные преобразования матрицы.

Элементарными преобразованиями матрицы назовем

а) умножение какой-либо ее строки на отличное от нуля число,

б) прибавление к какой-либо ее строке другой строки, умноженной на произвольное число.

Во многих книгах элементарным преобразованием матрицы называют также и перестановку ее строк. Покажем, что элементарным (в буквальном смысле) оно не является, поскольку его результат может быть достигнут с помощью нескольких преобразований а) и б). В самом деле, пусть требуется поменять местами i-ю и k-ю строки матрицы A, соответственно $(a_{i1},\ldots,a_{in})$ и $(a_{k1},\ldots,a_{kn})$.

Вначале k-ю строку, умноженную на -1, прибавим к i-й строке, после чего i-я строка примет вид $(a_{i1}-a_{k1},\ldots,a_{in}-a_{kn})$.

Затем полученную i-ю строку умножим на 1 и прибавим к k-й строке, после чего k-я строка запишется в виде $(a_{i1},\ldots,a_{in})$.

Теперь преобразованную таким образом k-ю строку умножим на -1 и прибавим к полученной ранее i-й строке. Тогда i-я строка примет вид $(-a_{k1},\ldots,-a_{kn})$.

Наконец, эту i-ю строку умножим на -1, после чего i-я и k-я строки примут соответственно вид $(a_{k1},\ldots,a_{kn})$, $(a_{i1},\ldots,a_{in})$.

К элементарным преобразованиям матрицы обычно относят также и аналогичные преобразования ее столбцов. Однако в теории систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) в этом нет необходимости, поскольку уравнениям данной СЛАУ соответствуют именно строки ее расширенной матрицы. Поэтому следует считать методически оправданным использование только преобразований а) и б).

Ниже нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Система векторов

$$\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m \tag{1}$$

линейно независима тогда и только тогда, когда уравнение

$$x_1\overline{a}_1 + x_2\overline{a}_2 + \ldots + x_m\overline{a}_m = \overline{0} \tag{2}$$

имеет лишь нулевое решение $(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (0,0,\ldots,0)$.

Доказательство очевидно.

Лемма 2. Уравнение (2), где $\overline{a}_i = col(a_{ji})\,(i = 1,2,\ldots,m, j = 1,2,\ldots,n),$ и СЛАУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = 0, \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = 0 \end{cases} \tag{3}$$

равносильны.

Аналогичное утверждение справедливо и для вектор-строк $\overline{a}_i$.

Доказательство также очевидно.

Заметим, что ввиду лемм 1 и 2 система векторов (1) линейно независима тогда и только тогда, когда СЛАУ (3) имеет лишь нулевое решение.

Лемма 3. Если $m > n$, то система n-мерных векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$ линейно зависима.

Доказательство не вызывает затруднений.

Лемма 4. Если векторы

$$\bar{a}_1',\bar{a}_2',\ldots,\bar{a}_m' \qquad (4)$$

получены соответственно из векторов

$$\bar{a}_1,\bar{a}_2,\ldots,\bar{a}_m \qquad (5)$$

одинаковым изменением порядка их компонент, то системы векторов (4) и (5) линейно зависимы или линейно независимы одновременно.

Доказательство. Очевидно, что одинаковое изменение порядка компонент данных векторов равнозначно перестановке уравнений в соответствующей этой системе векторов СЛАУ вида (3). Полученная при такой перестановке СЛАУ, соответствующая системе векторов (4), будет равносильна СЛАУ (3), и системы векторов (4) и (5) линейно зависимы или линейно независимы одновременно. ■

Лемма 5. Если СЛАУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n = 0, \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2} + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

равносильна СЛАУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n = 0, \end{cases} \qquad (7)$$

состоящей из первых r уравнений системы (6), то их основные матрицы имеют одинаковые столбцовые ранги.

Доказательство. Обозначим символами A и A_1 основные матрицы систем (6) и (7) соответственно.

Если матрица A_1 нулевая, то решением СЛАУ (7) является произвольный числовой набор. А поскольку СЛАУ (6) и (7) равносильны, то решением СЛАУ (6) также является произвольный числовой набор. Отсюда следует, что матрица A также нулевая, и потому матрицы A_1 и A имеют одинаковые столбцовые ранги (равные 0).

Рассмотрим теперь случай, когда A_1 – ненулевая матрица. Обозначим символами $r(A)$ и $\rho(A)$ строчечный и столбцовый ранги матрицы A соответственно, и пусть $\rho(A_1) = k$ $(1 \le k \le r)$. При этом, не нарушая общности, будем считать, что базисом системы ее вектор-столбцов является ее подсистема

$$\overline{a}_1^1, \overline{a}_1^2, \ldots, \overline{a}_1^k. \qquad (8)$$

Покажем, что (в той же нумерации) базисом системы вектор-столбцов матрицы A является ее подсистема

$$\overline{a}^1, \overline{a}^2, \ldots, \overline{a}^k. \qquad (9)$$

Уравнение $x_1\overline{a}_1^1 + x_2\overline{a}_1^2 + \ldots + x_k\overline{a}_1^k = \overline{0}$, очевидно, имеет только нулевое решение. Поэтому только нулевое решение имеет и СЛАУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k = 0, \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rk}x_k = 0, \end{cases} \qquad (10)$$

Покажем, что она равносильна СЛАУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k = 0, \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rk}x_k = 0, \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2} + \ldots + a_{mk}x_k = 0 \end{cases} \qquad (11)$$

Предположим, что это не так, т.е. СЛАУ (11) имеет и ненулевое решение $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$. Тогда (в чем легко убедиться проверкой) решением СЛАУ (6) будет являться его удлиненный набор $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, 0, \ldots, 0)$, состоящий из n чисел. Этот же набор будет являться и решением равносильной ей СЛАУ (7), и потому уже его укороченный (ненулевой) набор $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$

будет являться решением СЛАУ (10), хотя, как было отмечено выше, она имеет только нулевое решение.

Итак, СЛАУ (10) и (11) равносильны, и, следовательно, последняя имеет только нулевое решение. В свою очередь, СЛАУ (11) равносильна уравнению $x_1\overline{a}_1^1 + x_2\overline{a}_1^2 + \ldots + x_k\overline{a}_1^k = \overline{0}$, и, таким образом, оно имеет тоже только нулевое решение. Отсюда следует, что подсистема (9) линейно независима, и осталось показать, что каждый вектор системы $\overline{a}^1, \overline{a}^2, \ldots, \overline{a}^k, \ldots, \overline{a}^n$ вектор-столбцов матрицы A линейно выражается через векторы этой подсистемы.

Для вектор-столбца $\overline{a}^i$ при $1 \le i \le k$ это очевидно; пусть $k < i \le n$. Можно считать (соответствующим образом переставив вектор-столбцы), что $\overline{a}^i = \overline{a}^{k+1}$. Подсистема $\overline{a}_1^1, \overline{a}_1^2, \ldots, \overline{a}_1^k, \overline{a}_1^{k+1}$, очевидно, линейно зависима. Поэтому уравнение $x_1\overline{a}_1^1 + x_2\overline{a}_1^2 + \ldots + x_k\overline{a}_1^k + x_{k+1}\overline{a}_1^{k+1} = \overline{0}$ имеет ненулевое решение $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \lambda_{k+1})$. Далее, как и выше, показываем, что это уравнение равносильно уравнению $x_1\overline{a}^1 + x_2\overline{a}^2 + \ldots + x_k\overline{a}^k + x_{k+1}\overline{a}^{k+1} = \overline{0}$, и, следовательно, справедливо равенство

$$\lambda_1\overline{a}^1 + \lambda_2\overline{a}^2 + \ldots + \lambda_k\overline{a}^k + \lambda_{k+1}\overline{a}^{k+1} = \overline{0} \qquad (12)$$

Здесь $\lambda_{k+1} \ne 0$ (иначе набор $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ был бы ненулевым и вытекающее из (12) равенство $\lambda_1\overline{a}^1 + \lambda_2\overline{a}^2 + \ldots + \lambda_k\overline{a}^k = \overline{0}$ означало бы, что подсистема (9) линейно зависима). Поэтому $\overline{a}^{k+1} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{k+1}}\overline{a}^1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_{k+1}}\overline{a}^2 - \ldots - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\overline{a}^k$, т.е. вектор $\overline{a}^{k+1}$ линейно выражается через векторы подсистемы (9).

Итак, подсистема (9) является базисом системы вектор-столбцов матрицы A. А так как он состоит из k векторов, то $\rho(A) = k$, так что столбцовые ранги матриц A_1 и A равны между собой и в случае ненулевой матрицы A_1 ■

Перейдем к основному утверждению.

Теорема. Строчечный ранг матрицы равен ее столбцовому рангу.

Доказательство. Для нулевой матрицы данное утверждение очевидно.

Пусть $m \times n -$матрица $A = (a_{ij})$ ненулевая, и $r(A) = r$. Поскольку перестановка строк не меняет строчечного ранга матрицы, то, переставив при необходимости строки, можно считать, что первые r строк матрицы A образуют базис системы ее вектор-строк $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$. Эта перестановка не влияет и на ее столбцовый ранг, поскольку при этом у всех ее вектор-столбцов одинаково переставляются компоненты, а это не отражается на линейной зависимости или линейной независимости составленной из них системы.

Учтя это, запишем СЛАУ вида (6), для которой A является основной матрицей, и СЛАУ вида (7), состоящую из первых r уравнений СЛАУ (6); ее основную матрицу обозначим символом A_1. Покажем, что эти СЛАУ равносильны.

Вектор-строки матрицы A линейно выражаются через векторы базиса. В частности, при $r < i \le n$ имеем равенства $\overline{a}_i = \mu_1 \overline{a}_1 + \mu_2 \overline{a}_2 + \ldots + \mu_r \overline{a}_r$, где $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ - некоторые скаляры.

Умножим первую строку матрицы A на $-\mu_1$, вторую - на $-\mu_2$, и т.д., r-ю - на $-\mu_r$, где $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ взяты из последнего равенства, и полученные векторы прибавим к ее i-й строке. Получим матрицу с i-й нулевой строкой. Обнулим таким же способом все строки матрицы A, начиная с $r+1$-й, и отбросим их. При этом, очевидно, придем к матрице A_1. На языке СЛАУ результат наших преобразований означает, что СЛАУ (7) получается из (6) с помощью конечного числа элементарных преобразований. Очевидно, системы (6) и (7) равносильны, и потому

$$\rho(A) = \rho(A_1). \tag{13}$$

Далее, так как вектор-столбцы матрицы A_1 суть r-мерные векторы, то любая подсистема ее вектор-столбцов, содержащая более чем r векторов, линейно зависима. Поэтому $\rho(A_1) \le r$, т.е. $\rho(A_1) \le r(A)$, и ввиду (13)

$$\rho(A) \le r(A). \tag{14}$$

Неравенство (14) доказано нами для произвольной матрицы A. Поэтому оно верно и для транспонированной матрицы A^T. Имеем

$$\rho(A^T) \le r(A^T). \tag{15}$$

Но, очевидно, $\rho(A^T) = r(A)$, а $r(A^T) = \rho(A)$. Поэтому ввиду (15)

$$\rho(A) \ge r(A), \tag{16}$$

и из (14) и (16) получаем $\rho(A) = r(A)$ ■

---

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М.Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М.:Наука,1980. с. 6.

[2] Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.:ГИФМЛ,1963. с.41.

[3] Пизо Ш., Заманский М. Курс математики. М.:Наука,1971. с. 167.

[4] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. М.:Наука,1974. с. 41.

[5] Воеводин В.В. Линейная алгебра. М.:Наука,1974. с. 140.

[6] Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.:Наука, 1984. с. 181.

[7] Рублев А.Н. Линейная алгебра. М.:Высшая школа,1968. с. 87.

[8] Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. М.:Высшая школа,1979. с. 190.

Аннотация

Автор считает, что ради устранения некорректного употребления терминологии, широко распространенного при изложении раздела “Матрицы и определители”, следует отказаться от терминов “минор матрицы”, “базисный минор”, заменив их терминами “подматрица (субматрица)”, “базисная подматрица”. Предлагается один из подходов к доступному изложению темы “Ранг матрицы” в курсе линейной алгебры для математических специальностей вузов.

Once again about advantage of clear mathematical language

Abdrakhvanov V.G.

The author considers, that for the sake of the elimination of the incorrect use of terminology widely widespread at a statement of section " Matrixes and determinants ", it is necessary to refuse terms " a minor of a matrix ", " a basic minor ", having replaced them with terms " a submatrix ", " a basic submatrix ". One of approaches to an accessible statement of a theme " Rank of a matrix " in a rate of linear algebra for mathematical specialities of high schools is offered.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Абдрахманов Валий Габдрауфович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики Уфимского государственного авиационного технического университета.